

УДК 539.1

## УЛУЧШЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РАМАНА–НАТА ДЛЯ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ КАПИЦЫ–ДИРАКА

Л.А. ОГАННЕСЯН, А.Ж. МУРАДЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 4 июня 2009 г.)

На основе известного приближения Рамана–Ната, получен новый аналитический вид амплитуды резонансного рассеяния Капицы–Дирака атома в поле встречных импульсов лазерного излучения. Проведено сопоставление полученной формулы с приближением Рамана–Ната. Оно показывает, что помимо когерентной дифракции, наша формула описывает также процесс каналирования атомов в периодическом поле, созданном встречными лазерными импульсами.

### 1. Введение

Резонансное когерентное рассеяние Капицы–Дирака атомов на периодических структурах стоячих волн лазерного излучения – один из фундаментальных процессов в атомной оптике и атомной интерферометрии [1]. В простейшем случае, когда атом обладает определенным значением импульса до рассеяния, после рассеяния он переходит в суперпозиционное состояние поступательного движения. Моноимпульсный пучок атома тем самым расщепляется на субпучки. Аналитические результаты для этого когерентного процесса получены для двух режимов взаимодействия – Брэгга и Рамана–Ната. Другой возможный режим взаимодействия – режим каналирования, пока остается вне возможностей аналитического рассмотрения. Отметим, что границы между указанными режимами определяются двумя параметрами системы: во-первых, периодом колебания атома в яме периодического потенциала и вероятностью перехода атома из одной ямы в соседнюю за время одностороннего движения атома в яме периодического потенциала, во-вторых. Наиболее простым с точки зрения экспериментальной реализации является режим Рамана–Ната. Для этого достаточно, чтобы время взаимодействия атома с полем стоячей волны (образованной встречными импульсами лазерного излучения) было существенно меньше этого периода. Неопределенность в энергии при этом, наряду с пространственной периодичностью потенциала, дает возможность одновременной генерации ряда дискретных, равноудаленных друг от друга импульсных состояний атома в спектре движения центра тяжести.

Режим Брэгга реализуется, если время взаимодействия атома с полем стоячей волны существенно больше периода колебаний в яме и одновременно

вероятность перехода (туннелирования) между соседними ямами велика. Это наиболее желаемый режим для нужд атомной интерферометрии, поскольку импульсное состояние атома расщепляется всего на две составляющие, симметрично расположенные относительно нулевого значения. Однако из-за относительно большого значения массы атома для микропроцессов, угол расщепления атомного пучка в первом порядке дифракции оказывается малым. Что касается высоких порядков брэгговской дифракции, то требования для их экспериментальной реализации очень жесткие.

Режим Брэгга постепенно переходит в режим каналирования, если вероятность туннелирования атома уменьшается и характер взаимодействия приближается к квазиклассическому. Этот режим дифракции, хотя и реализован на эксперименте [2], исследован крайне мало. Причиной тому является, по всей вероятности, отсутствие аналитических результатов для этого, наиболее общего режима взаимодействия. В связи с этим следует отметить, что режим Брэгга исследуется относительно просто, поскольку из всех возможных значений импульса атома остаются только два. В режиме же Рамана–Ната упрощающим элементом в традиционном подходе к задаче является то, что из-за коротких времен взаимодействия оказывается возможным считать атом эффективно неподвижным и не включать оператор кинетической энергии атома в гамильтониан системы [3].

В настоящей работе мы представим вывод аналитического вида амплитуды рассеяния атома в несколько модифицированном варианте приближения Рамана–Ната [4]. Далее, основываясь на интерпретации генерированных амплитуд как конечного результата процесса рассеяния, мы в каждой амплитуде рассеяния заменим средний импульс атома на то значение, которое соответствует данной амплитуде рассеяния. Чтобы оценить, насколько существенным оказывается это видоизменение для процесса дифракции, мы проводим численные расчеты по двум соответствующим формулам: до и после указанного видоизменения. Результаты представлены в виде графиков. Их простое сопоставление показывает, что нам удалось, помимо количественных изменений, получить и качественно новую ветвь в спектре дифракции, соответствующую каналированному режиму движения атома. Следовательно, предлагаемая нами формула, выведенная в рамках приближения Рамана–Ната и несколько обобщенная на основе физических соображений, частично включает и режим каналирования. Отметим также, что обобщенная формула практически не воспроизводит брэгговский режим рассеяния [5].

## 2. Вывод формулы для амплитуды когерентной дифракции

Электрическое поле встречно-распространяющихся импульсов представим в виде

$$E(z, t) = E_1(t - z/c)e^{i(kz - \omega t)} + E_2(t + z/c)e^{-i(kz - \omega t)} + \text{с.с.}, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота поля ( $k = \omega/c$ ),  $z$  – координата центра массы атома в направлении распространения волны,  $E_{1,2}$  – амплитуды электрического поля световых импульсов, имеющих колоколообразные формы в направлении распространения и плоских в поперечной плоскости. По этой причине поперечный импульс атома остается постоянным и не учитывается в дальнейших расчетах. Ограничиваясь дипольным приближением во взаимодействии атома с электромагнитным полем, для гамильтониана системы будем иметь

$$\hat{H} = -(\hbar^2/2M)\partial^2/\partial z^2 + \hat{H}_0 - \hat{d}E(t, z), \quad (2)$$

где  $\hat{H}_0$  – гамильтониан свободного неподвижного атома,  $\hat{d}$  – оператор дипольного момента оптического электрона атома.

Волновая функция атома в двухуровневом приближении, то есть в предположении, что несущая частота лазерных импульсов близка к частоте перехода из основного состояния в одно из возбужденных состояний ( $\omega_0$ ), может быть записана в следующем виде:

$$\psi(z, \mathbf{r}, t) = a(z, t)\psi_1(\mathbf{r})e^{-i\frac{\epsilon_1 t}{\hbar}} + b(z, t)\psi_2(\mathbf{r})e^{-i\frac{\epsilon_2 t}{\hbar} - i\Delta t}, \quad (3)$$

где  $a(z, t)$  и  $b(z, t)$  – искомые амплитуды вероятности,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\psi_1(\mathbf{r})$ ,  $\psi_2(\mathbf{r})$  – собственные значения и собственные функции гамильтониана атома  $\hat{H}_0$  для основного и возбужденного состояний, соответственно,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор оптического электрона относительно центра тяжести атома, а  $\Delta = \omega - \omega_0$  – расстройка резонанса.

Подставляя (1) и (3) в уравнение Шредингера, после стандартных преобразований получим уравнения для искомых амплитуд:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) a(z, t) = -d \left( E_1^* e^{-ikz} + E_2^* e^{ikz} \right) b(z, t), \quad (4)$$

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hbar\Delta + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) b(z, t) = -d^* \left( E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz} \right) a(z, t). \quad (5)$$

Для решения полученной системы предположим, что несущая частота поля удалена от частоты атомного перехода намного больше, чем спектральная ширина импульсов и доплеровское уширение оптического перехода. Тогда первым и третьим слагаемыми в левой стороне уравнения (5) можно пренебречь и получить алгебраическую связь

$$b(z, t) = -\left( d^* / \hbar\Delta \right) \left( E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz} \right) a(z, t). \quad (6)$$

Подставляя в (4), для амплитуды основного состояния получаем следующее уравнение шредингеровского вида:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{|d|^2}{\hbar\Delta} |E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz}| \right) a(z, t) = 0. \quad (7)$$

Можно получить приближенное решение этого уравнения. Для этого предположим, что атом начинает взаимодействие с полем, имея определенное значение импульса  $p_0$  и в амплитуде вероятности разделим фактор, соответствующий этому движению:

$$a(z, t) = A(z, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_0^2}{2M} t + \frac{i}{\hbar} p_0 z}. \quad (8)$$

Новый неизвестный коэффициент  $A(z, t)$  представляет те изменения в состоянии поступательного движения атома, которые обусловлены взаимодействием со встречно-распространяющимися оптическими импульсами и удовлетворяет уравнению

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{p_0}{M} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{|d|^2}{\hbar\Delta} |E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz}|^2 \right) A(z, t) = 0. \quad (9)$$

Пренебрегая второй производной, расчеты можно продолжить, не конкретизируя форму огибающих  $E_1(t - z/c)$  и  $E_2(t + z/c)$ . Однако для большей наглядности мы предположим, что они имеют гауссовскую форму и что длительности у них одинаковые, то есть

$$E_{1,2}(z, t) = E_{1,2}^0 \exp\left(-\frac{(t \mp z/c)^2}{\tau^2}\right). \quad (10)$$

Тогда будем иметь

$$A(z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m \left( \frac{\sqrt{2\pi} E_1^0 E_2^0 \tau |d|^2}{\Delta \hbar^2} e^{-\frac{2z^2}{c^2 \tau^2}} e^{-\frac{k^2 p_0^2 \tau^2}{2M^2}} \right) e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 + m 2\hbar k) z - \frac{i}{\hbar} \frac{(p_0 + m 2\hbar k)^2}{2M} t}, \quad (11)$$

где  $J_m(x)$  – функция Бесселя. Полученное выражение, вместе с формулой (8), показывает, что взаимодействие со встречными оптическими импульсами переводит квантовое состояние поступательного движения атома из состояния с определенным значением импульса ( $p_0$ ) в суперпозиционное состояние с почти дискретным распределением вокруг эквидистантных значений:  $p_m = p_0 + m 2\hbar k$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Выражение (11) отличается от стандартного вида приближения Рамана–Ната наличием двух экспоненциальных множителей в аргументе функции Бесселя:  $\exp(-2z^2/c^2 \tau^2)$  и  $\exp(-k^2 p_0^2 \tau^2 / 2M^2)$ . Первый из них учитывает влияние степени перекрытия встречных импульсов на эффективность переброса фотонов из одного оптического импульса в другой (что является механизмом изменения импульсного состояния атома в рассматриваемых условиях). Второй множитель учитывает относительное доплеровское смещение спектров двух встречных импульсов в системе отсчета атома.

Предполагаемое нами улучшение формулы рассеяния относится ко второму из указанных множителей. В него входит  $p_0$  – начальный импульс атома, в то время как сама функция Бесселя относится к вероятностной амплитуде свободного движения (после взаимодействия с импульсами) со значением импульса  $p_0 + 2m\hbar k$ . Поэтому замена значения  $p_0$  на значение  $p_0 + 2m\hbar k$  должна в определенной степени улучшить аналитическое представление амплитуд когерентной дифракции. Аналогичную замену, строго говоря, следует произвести и в расстройке резонанса, которая входит в знаменатель бесселевой функции. То есть мы предлагаем амплитуду конечного состояния, вместо (11), взять в виде

$$A(z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m \left( \frac{\sqrt{2\pi} E_1^0 E_2^0 \tau |d|^2}{\hbar^2 \sqrt{\Delta^2 - (p_0 + 2m\hbar k)^2}} e^{-\frac{2z^2}{c^2 \tau^2}} e^{-\frac{k^2 (p_0 + 2m\hbar k)^2 \tau^2}{2M^2}} \right) e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 + 2m\hbar k) z - \frac{i (p_0 + 2m\hbar k)^2}{2M} t}. \quad (12)$$

### 3. Численные расчеты. Сопоставление картин дифракции

В аргументе функции Бесселя экспоненциальный множитель представляет число вынужденных переходов между внутренними состояниями атома, с помощью которых происходит обмен импульсами и энергией между атомом и полем за время взаимодействия. Для далеко не экстремальных интенсивностей наносекундных лазерных импульсов это число, например, для атомов щелочных металлов, может составить несколько десятков.

Рис.1 дает нам возможность сопоставить импульсные распределения, которые атом приобретает, согласно формуле (11) и ее улучшенной версии (12), в зависимости от значения начального импульса. Видно, что закономерности существенно разные. Согласно формуле (11), распределение сжимается и остается симметрично распределенным вокруг нулевого значения  $p_m = 0$ . В улучшенной же версии ширина распределения даже несколько увеличивается, а центр постепенно смещается в сторону начального импульса  $p_0$ .

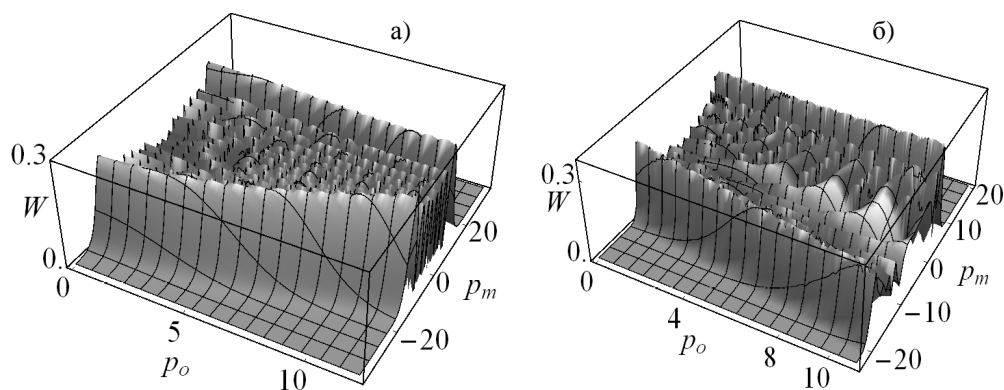


Рис.1. Импульсные распределения атома, полученные при рассеянии в поле встречных световых импульсов в зависимости от начального

импульса (представлен на оси в единицах  $2\hbar k$ ). Расчеты проведены на основе формул (11) (а) и (12) (б).

Рис.2 показывает, как ведут себя импульсные распределения в зависимости от интенсивности вынуждающих оптических импульсов. Видно, что новая формула (12) в этом случае дает лишь умеренные отклонения от первоначальной версии (11).

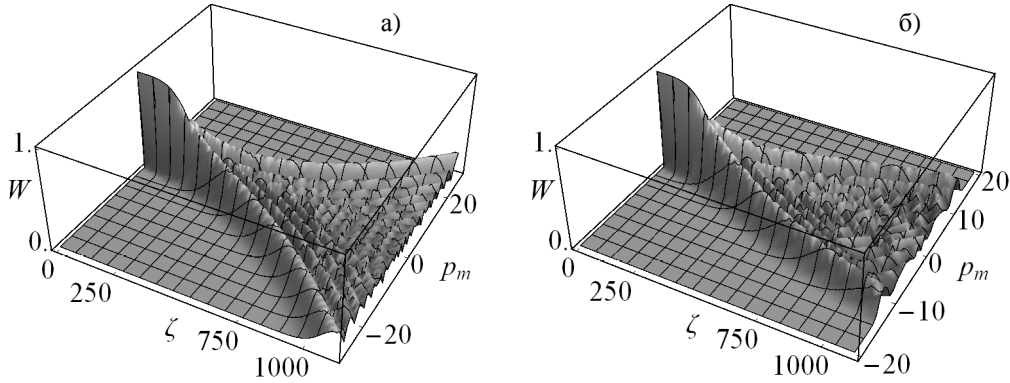


Рис.2. Импульсные распределения атома в зависимости от интенсивности оптических импульсов. На оси она представлена безразмерным параметром  $\xi$ . Расчеты проведены с помощью формул (11) (а) и (12) (б).

Наиболее важные изменения происходят во временной зависимости дифракции, точнее, в зависимости от продолжительности встречно-распространяющихся импульсов. Рис.3 показывают эти зависимости для случая нулевого начального значения импульса атома. Формула (11), которая в данном специальном случае в точности совпадает с формулой традиционного приближения Рамана–Ната, при росте длительности световых импульсов ведет к безграничному уширению импульсного распределения. Это неуклонное уширение импульсного распределения лишено, конечно, физического смысла, поскольку противоречит совместным требованиям законов сохранения энергии и импульса. Уширение спектра импульсов может иметь место в действительности настолько, насколько разрешается соотношением неопределенности энергии и времени, и поэтому только в области малых времен. Для условий и нормировок данного рисунка этому соответствует область  $t < 0.2$ . То есть законы сохранения совместно с квантово-механическим соотношением неопределенности должны в области  $t > 0.2$  постепенно сузить импульсное распределение. Как видно из рис.3, модифицированная нами формула (12) как раз дает физически ожидаемый характер поведения для импульсного распределения.

Рис.4а показывает, что наша нестандартная форма приближения Рамана–Ната (11) при ненулевых начальных импульсах все же учитывает

необходимость сужения импульсного распределения в области больших времен взаимодействия. Но при этом она не содержит ничего о режиме каналирования. Дополнительные к рис.4а состояния, которые присутствуют на рис.4б, построенном по модифицированной версии (12), выявляют закономерности, которые мы ожидаем для режима каналирования. Действительно, в квазиклассическом представлении режим каналирования выглядит почти как равномерное продольное движение, с одновременным колебательным движением в поперечном направлении. Поэтому поперечное движение режима каналирования в импульсном представлении должно представиться неким узким распределением состояний вокруг нулевого значения импульса, как это и имеет место на рис.4б. Отметим, что вопрос о степени точности воспроизведения режима каналирования в формуле (12) остается пока открытым.

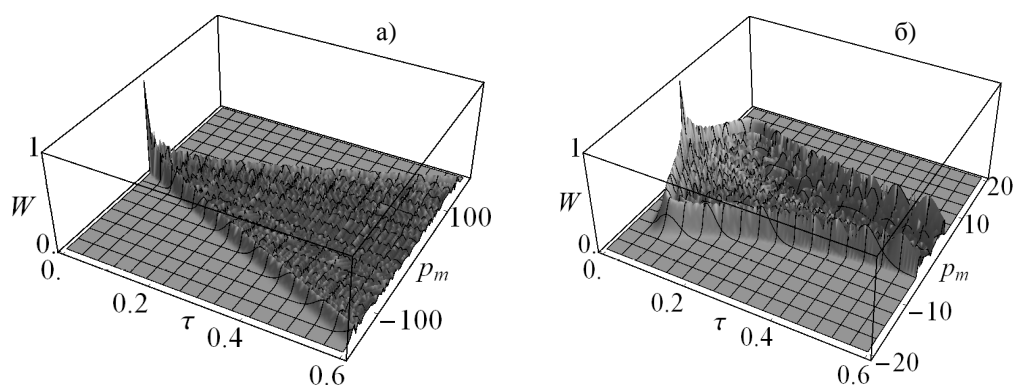


Рис.3. Импульсные распределения атома после дифракции полем встречных оптических импульсов в зависимости от длительности этих импульсов, при  $p_0 = 0$ . Расчеты проведены на основе формул (11) (а) и (12) (б).

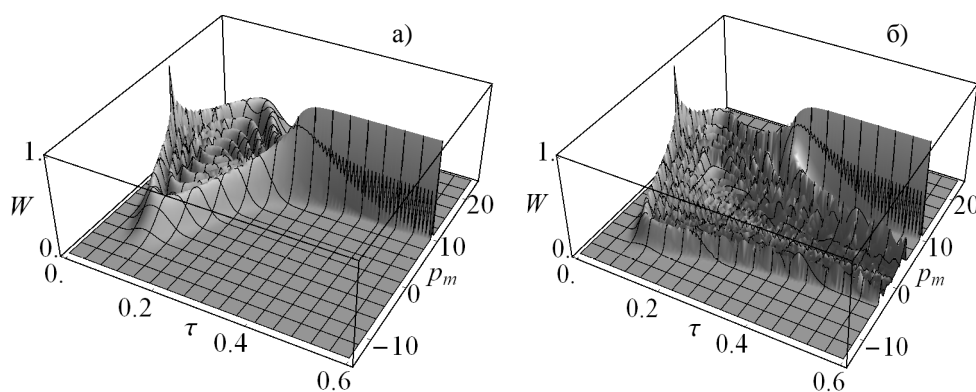


Рис.4. Аналогичные к рис.3 распределения, вычисленные при  $p_0 = 10$ . Расчеты проведены на основе формул (11) (а) и (12) (б).

Объединение режима каналирования в формулу дифракции (12) является, на наш взгляд, наиболее существенным звеном в обогащении физического содержания аналитической формулы нестандартного приближения Рамана–Ната (11).

Работа выполнена в рамках гранта тематического финансирования МОиН Армении № 0126 и NFSAT/CRDF Grant UCEP-02/07.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Atom Interferometry, **P.Berman**, (ed.). New York, Acad. Press, 1997; **U.P.Poulsen**, **K.Molmer**. ArXiv:cond-mat/0109048v1; **B.Dubetsky**, **M.Kasevich**. Phys. Rev. A, **74**, 023615 (2006).
2. **C.Salomon**, **J.Dalibard**, **A.Aspect**, **H.Metcalf**, **C.Cohen-Tannoudji**. Phys. Rev. Lett., **59**, 1659 (1987); **C.Keller**, **J.Schmiedmayer**, **A.Zeilinger**, **T.Nonn**, **S.Durr**, **R.Rempe**. Appl. Phys. B, **69**, 303 (1999).
3. **H.Batelaan**. Contemporary Physics, **41**, 369 (2000); **Ph.H.Bucksbaum**. Nature, **413**, 117 (2001); **H.Muller**, **Sh.-W.Chiow**, **S.Chu**. ArXiv: 0704.2627v1.
4. **В.М.Арутюнян**, **А.Ж.Мурадян**. Доклады АН Арм.ССР, **60**, 275 (1975).
5. **M.K.Oberthaler**, **R.Abfaltrer**, **S.Bernet**, **J.Schmiedmayer**, **A. Zeilinger**. Phys. Rev. Lett., **77**, 4980 (1996); **P.B.Blakie**, **R.J.Ballagh**. J. Phys. B, **33**, 3961 (2000).

## ԲԱՐԵԼԱՎՎԱԾ ՌԱՄԱՆ–ՆԱԹԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԱՊԻՑԱ–ԴԻՐԱԿԻ ՑՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Լ.Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Ա.Ժ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Հիմնվելով լավ հայտնի Ռաման–Նաթի մոտավորության վրա՝ ներկայացված է նոր անալիտիկ տեսք ատոմների ռեզոնանսային Կապիցա–Դիրակի ցրման լայնույթների համար լազերային ճառագայթման հանդիպակաց իմպուլսների դաշտում: Գնահատելու համար առաջարկված բանաձևի կարևորությունը՝ կատարվել է համադրում մեր բանաձևի և հայտնի Ռաման–Նաթի մոտավորության միջև: Այն ցույց է տալիս, որ բացի կոհերենտ դիֆրակցիայից, բանաձևը ընդգրկում է նաև ատոմների կանալացման ռեժիմը հանդիպակած տարածվող լազերային իմպուլսներով ստեղծված պարբերական դաշտում:

## IMPROVEMENT OF THE RAMAN–NATH APPROXIMATION TO RESONANT KAPITZA–DIRAC DIFFRACTION

L.A. HOVHANNISYAN, A.Zh. MURADYAN

Based on the well-know Raman–Nath approximation we present a new analytic form for the process of resonant Kapitza–Dirac diffraction of atoms in the field of counterpropagating pulses of laser radiation. For estimating the importance of the proposed formula, comparison of our formula with the Raman–Nath approximation is carried out. It is shown that along with coherent diffraction, the formula also includes the channeling regime of atoms in the periodic field of counterpropagating laser pulses.