

УДК 519.24

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА: ОПТИМАЛЬНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА ДИСПЕРСИИ

В. М. МЫХИТАРЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак

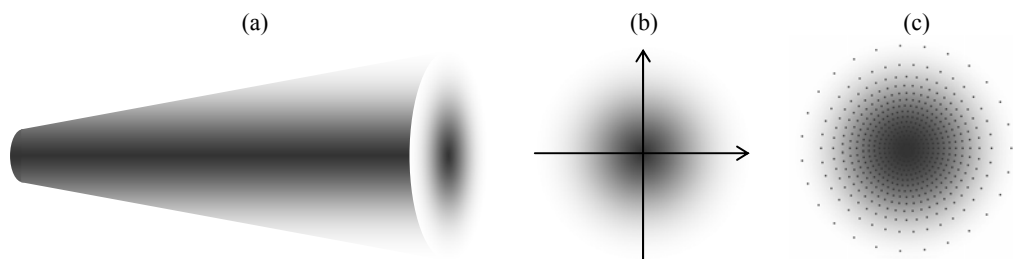
(Поступила в редакцию 5 февраля 2013 г.)

Эл-почта: [vm@ipr.sci.am](mailto:vm@ipr.sci.am)

Сформулированы критерий оптимальных измерений на основе минимума дисперсии и вариационная задача оптимального распределения измерений. Получено аналитическое решение для плотности распределения измерений в случае оптимальных измерений, построен дискретный эквивалент оптимальных измерений. Измерения с оптимальным распределением наиболее устойчивыми характеристиками, обеспечивают минимальные потери точности измерений, как при изменении числа измерений, так и при их перераспределении, т.е. оптимальные измерения обеспечивают равноценность (однородность) измерений в разных точках. Оптимальные измерения обеспечивают оптимальные значения произвольных параметров этой функции, а наилучшей из квадратичных форм для определения произвольного параметра измеряемой функции является выражение функции распределения  $\chi^2$ . Получено непрерывное представление дискретно определенной функции распределения  $\chi^2$ , соответствующее именно оптимальному распределению измерений. Приведен пример решения задачи планирования измерений пространственных параметров лазерного пучка с наименьшим среднеквадратичным отклонением при ограниченном количестве фотодетекторов.

### 1. Введение – пример задачи планирования эксперимента

**Задача планирования измерений параметров лазерного пучка.** В эксперименте для исследования влияния состояния атмосферы на прохождение лазерного излучения планируется на определенном расстоянии регистрировать пучок с гауссовым распределением интенсивности излучения  $I(x)$  по сечению в виде  $I(x) = (hvP/\pi a^2)\exp(-r^2/a^2)$ , где  $hv$  – энергия фотона излучения лазера с частотой  $\nu$ ,  $P$  – количество фотонов, излученных в единицу времени (интегральная мощность излучения  $hvP$ ),  $a$  – радиус пучка,  $r$  – расстояние от центра пучка (рис.1).



**Рис. 1.** Лазерный пучок (а) с гауссовым распределением интенсивности излучения (b) и распределение фотодетекторов на принимаемой поверхности (с).

Физическая природа и процессы формирования лазерного излучения таковы, что статистическое распределение флуктуаций плотности интенсивности излучения фотонов подчиняется закону распределения Пуассона с дисперсией  $\chi^2(r) = (P/\pi a^2)\exp(-r^2/a^2)$ . Требуется так распределить заданное количество  $n_0$  фотодетекторов на принимаемой поверхности (планировать эксперимент), чтобы обеспечить наименьшее среднеквадратичное отклонение (ошибку) измерений параметров пучка.

В данной постановке задачи следует также выяснить – пригодно ли распределение детекторов для наилучшего измерения, скажем, интегральной мощности  $P$ , для измерения ширины  $a$  или координат центра пучка с наименьшей ошибкой, или же для измерения каждого параметра с наименьшей ошибкой требуется иное, соответствующее именно этому параметру распределение детекторов.

## 2. Критерий оптимальности измерений

Если для исследования физического процесса в эксперименте требуется определить функцию  $f(x)$  ( $x$  – координата, время и т.д.), то она представляется в виде набора измеренных значений (показаний детекторов)  $\xi(x)$  и их количества (детекторов)  $n(x)$  в окрестности  $\Delta x$  точек измерения  $x$  (рис.2).

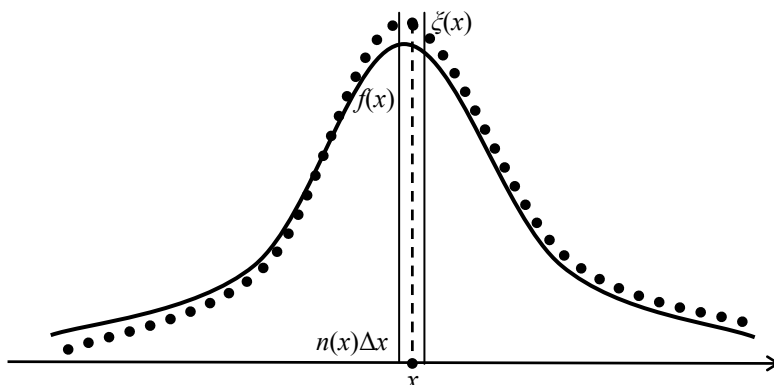


Рис.2. Измеряемая функция  $f(x)$  (сплошная линия), представленная в виде набора измеренных значений  $\xi(x)$  (черные точки).

При планировании эксперимента в условиях ограничения средств измерений необходимо выяснить, какое распределение средств измерения является оптимальным для измерения функции  $f(x)$ .

Для решения задачи планирования эксперимента в такой постановке необходима выработка критерия оптимальности измерений. При этом критерий должен обеспечивать "хорошее" измерение функции – как в смысле значений самой функции, так и значений ее параметров, не зависимо от конкретного представления функции и параметров данного представления (ряд Тейлора, представление Фурье, представление функциями определенного класса, вейвлет аппроксимации и т.п.).

Так как все параметры функции получаются при обработке результатов измерений  $\xi(x)$  как значения самой функции  $f(x)$ , то общий критерий может быть выработан на основе характеристик измерений именно значений функции. В данной работе такой характеристикой служит дисперсия  $\sigma^2(x)$  величины  $\xi(x)$ .

## 3. Оптимальное измерение

Пусть функция  $f(x)$  определяется посредством  $n_0$  измерений в области  $x \in Q$ , плотность распределения которых задается функцией  $n(x)$ . Если рассмотреть участок измерений  $\Delta x$ , то  $n(x)\Delta x$  есть количество измерений (или детекторов) на этом участке. При измерении значения функции в точке  $x$  дисперсия, отнесенное на участок  $\Delta x$ , есть

$$\overline{[f(x)\Delta x - \xi(x)\Delta x]^2} = \overline{[f(x) - \xi(x)]^2} \Delta x^2 = \sigma^2(x) \Delta x^2, \quad (1)$$

где черта означает усреднение в статистическом смысле, а  $\sigma^2(x) =$

$\overline{[f(x) - \xi(x)]^2}$  – дисперсия показаний детекторов в точке  $x$ . Если на участке  $\Delta x$  количество детекторов есть  $n(x)\Delta x$ , то определим качество измерений на участке  $\Delta x$  как

$$\frac{\sigma^2(x)\Delta x^2}{n(x)\Delta x} = \frac{\sigma^2(x)}{n(x)}\Delta x. \quad (2)$$

Величина  $\sigma^2(x)/n(x)$  показывает, насколько хорошо (точно) определяется значение функции  $f(x)$  в точке  $x$ . Мерой качества измерений функции по всей области может служить сумма дисперсий по всей области  $Q$

$$\overline{D^2} = \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx. \quad (3)$$

Для однократных измерений имеем

$$D^2 = \int_Q \frac{[f(x) - \xi(x)]^2}{n(x)} dx. \quad (4)$$

Критерием оптимальных измерений будем считать величину  $\overline{D^2}$ . При этом оптимальные измерения обеспечивают минимальное  $\overline{D^2}$ . Распределение измерений  $n(x)$ , соответствующее случаю оптимальных измерений, определим как оптимальное распределение измерений (детекторов).

На основе вышесказанного можно сформулировать вариационную задачу для оптимального распределения измерений  $n(x)$  в области  $x \subset Q$ :

*Оптимальное распределение измерений  $n(x)$  обеспечивает минимум функционала*

$$\overline{D^2} = \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx \rightarrow \min, \quad (5)$$

*при условии ограничения на количество измерений*

$$n_0 = \int_Q n(x) dx. \quad (6)$$

Применение метода неопределенных коэффициентов Лагранжа для решения вариационной задачи со связями [1] приводит (5), (6) к вариационной задаче для функционала

$$\overline{D^2} = \int_Q \left[ \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} + \lambda n(x) \right] dx \rightarrow \min \quad (7)$$

с неопределенным постоянным коэффициентом  $\lambda$ . Приравнявая к нулю вариацию функционала (7) от подинтегральной функции  $n(x)$  при изменении на  $\delta n(x)$

$$\delta \overline{D^2} = \int_Q \delta \left[ \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} + \lambda n(x) \right] dx = \int_Q \left[ -\frac{\sigma^2(x)}{n^2(x)} + \lambda \right] \delta n(x) dx = 0, \quad (8)$$

получим решение в виде  $n^2(x) = \lambda \sigma^2(x)$ . Или

$$n(x) = n_0 \frac{\sigma(x)}{\int_Q \sigma(x) dx}, \quad (9)$$

где неопределенный коэффициент решения  $\lambda$  определен из условия (6). Задачу оптимальных измерений в форме (5) легко обобщить и для других типов функций и условий ограничения на

средства измерений.

#### 4. Дискретный эквивалент оптимальных измерений

Так как в большинстве случаев измерения носят дискретный характер, то необходимо построить дискретный эквивалент оптимальных измерений. Для этого рассмотрим разбиение (бинирование) на участки  $Q_i$ , где проводятся  $N_i$  измерений (детекторов). При этом

$$N_i = \int_{Q_i} n(x) dx, \quad (10)$$

где  $N_i$  – целое число. Без ограничения общности можно принять  $N_i = 1$ . Тогда

$$\int_{Q_i} n(x) dx = Q_i n(x_i) = 1, \quad (11)$$

где  $x_i$  соответствует точке среднего значения  $n(x)$  в области  $Q_i$ . Аналогично имеем

$$\int_{Q_i} \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx = \frac{\sigma^2(x_i')}{n(x_i')} Q_i, \quad (12)$$

где  $x_i'$  соответствует точке среднего значения  $\sigma^2(x)/n(x)$  в области  $Q_i$ .

Как видим, в общем случае точки установки детекторов  $x_i$  и точки измерений  $x_i'$  могут и не совпадать, и построение дискретного эквивалента не всегда возможно. Но в случае оптимального распределения (9) получается, что подинтегральные функции в (11) и (12) одинаковы и, поэтому  $x_i = x_i'$ .

Таким образом, в случае оптимальных измерений возможно построение дискретного эквивалента непрерывных измерений. Т.е. если непрерывные измерения заменить дискретными согласно (11) в точках  $x_i$ , то измерения именно в этих точках обеспечат оптимальное измерение с минимальной величиной

$$\overline{D^2} = \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx = \sum_i \frac{\sigma^2(x_i)}{n(x_i)} Q_i = \sum_i \frac{\sigma^2(x_i)}{n^2(x_i)} = \frac{1}{n_0} \left[ \int_Q \sigma(x) dx \right]^2 = \min. \quad (13)$$

Соответственно, для однократных измерений (4) имеем

$$D^2 = \int_Q \frac{[f(x) - \xi(x)]^2}{n(x)} dx = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{[f(x_i) - \xi(x_i)]^2}{n(x_i)} Q_i = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{[f(x_i) - \xi(x_i)]^2}{n^2(x_i)} = \min. \quad (14)$$

Подставляя решение для  $n(x)$  в виде (9) получим

$$D^2 = \frac{1}{n_0} \left[ \int_Q \sigma(x) dx \right]^2 \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{[f(x_i) - \xi(x_i)]^2}{\sigma^2(x_i)} = \chi^2 \frac{1}{n_0} \left[ \int_Q \sigma(x) dx \right]^2. \quad (15)$$

Т.е. дискретный эквивалент оптимальных измерений, соответствующий разбиению (12), описывается функцией распределения  $\chi^2$  с  $n_0$  степенями свободы [2]. По сути, оптимизация измерений производится по критерию минимума  $\chi^2$ . При этом находим также непрерывное представление дискретно определенной функции  $\chi^2$  в виде

$$\chi^2 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{[f(x_i) - \xi(x_i)]^2}{\sigma^2(x_i)} = \frac{1}{\int_Q \sigma(x) dx} \int_Q \frac{[f(x) - \xi(x)]^2}{\sigma(x)} dx. \quad (16)$$

Если же распределение неоптимальное, то выражения (3), (4) не преобразуются, соответственно, в выражения (13), (15) и получаются квадратичные формы типа

$$D^2 = \sum_i \mu_i [f(x_i) - \xi(x_i)]^2, \quad (17)$$

для которых

$$\overline{D^2} = \sum_i \mu_i \sigma^2(x_i) > \frac{1}{n_0} \left[ \int_Q \sigma(x) dx \right]^2 = \min. \quad (18)$$

Отметим, что разбиение (бинирование) области измерений  $Q$  на участки  $Q_i$  неоднозначно, и единственному оптимальному распределению измерений соответствуют многие дискретные эквиваленты, удовлетворяющие соотношению (11). Очевидно, что из этого многообразия разбиений наиболее подходящим является тот, который отражает симметрию решаемой задачи и обеспечивает наиболее "однородное" (гладкое) разбиение области измерений.

### 5. Устойчивость характеристик оптимальных конфигураций

Рассмотрим также вопрос об устойчивости характеристик полученных оптимальных конфигураций, когда распределение  $n(x)$  изменяется на  $\delta n(x)$  (возмущение). Имеем

$$\Delta \overline{D^2} = \delta \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx = - \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n^2(x)} \delta n(x) dx. \quad (19)$$

Если  $n(x)$  соответствует оптимальному распределению измерений (9), то имеем

$$\Delta \overline{D^2} = - \int_Q \delta n(x) dx \cdot \frac{1}{n_0^2} \left[ \int_Q \sigma(x) dx \right]^2, \quad (20)$$

или

$$\Delta \overline{D^2} / \overline{D^2} = - \frac{1}{n_0} \int_Q \delta n(x) dx = - \frac{\Delta n}{n_0}, \quad (21)$$

где  $\Delta n$  – изменение общего количества измерений.

Как видим, при оптимальных измерениях качество измерений изменяется пропорционально общему количеству изменения числа измерений, вне зависимости от того, в какой области произошли эти изменения. Другими словами, если регистрация ведется  $n_0$  детекторами и испортился один из них, то точность измерений ухудшится на одно и то же число, вне зависимости от того, где был расположен этот детектор. Свойство равноценности измерений при оптимальных распределениях вытекает также из выражения  $D^2$  (15). Каждый член этой суммы имеет одинаковое влияние на величину  $D^2$ . Таким образом, оптимальное распределение обеспечивает одинаковую ценность отдельных измерений по всей области измерений.

При неоптимальном распределении, как видно из (17) и (18), отдельные измерения в различных областях не равноценны и, соответственно, в выражение для  $D^2$  (17) входят с разными весами  $\mu_i$ . Как видно из (18), в этом случае, при исключении одного измерения точность изменяется в среднем больше, чем при оптимальных распределениях.

### 6. Оптимизация измерений при решении многих задач

При планировании эксперимента часто возникает необходимость применения одних и тех же измерений (детекторов) для определения нескольких функций. В связи с этим возникает потребность оптимального распределения измерений для решения многих задач и определения этих функций.

Пусть требуется измерять функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  с соответствующими  $\square_1^2(x), \square_2^2(x), \dots, \square_k^2(x)$ . Качества измерений отдельных функций есть

$$\overline{D_1^2} = \int_Q \frac{\sigma_1^2(x)}{n(x)} dx, \quad \overline{D_2^2} = \int_Q \frac{\sigma_2^2(x)}{n(x)} dx, \quad \dots, \quad \overline{D_k^2} = \int_Q \frac{\sigma_k^2(x)}{n(x)} dx, \quad (22)$$

с общим для всех ограничением (6). Если заданы статистические веса  $\square_1, \square_2, \dots, \square_k$  решаемых задач, определяемые соотношениями точностей решаемых задач, то можно минимизировать выражение

$$\overline{D^2} = \int_Q \frac{S^2(x)}{n(x)} dx, \quad S^2(x) = \omega_1 \sigma_1^2 + \omega_2 \sigma_2^2 + \dots + \omega_k \sigma_k^2. \quad (23)$$

Т.е. при решении многих задач качество измерений в точке  $x$  определяется выражением  $S^2(x)/n(x)$ . Например, если требуется измерять функции  $f(x-a)$  для различных значений  $a$  с одинаковой точностью в пределах  $[-a_0, a_0]$ , то в качестве  $S^2(x)$  может использоваться выражение

$$S^2(x) = \int_{-a}^a \sigma^2(x-a) da = \int_{x-a_0}^{x+a_0} \sigma^2(z) dz. \quad (24)$$

### 7. Оптимальная обработка неоптимальных измерений

Когда измерения планируются на решение многих задач, то результаты измерений не являются оптимальными для одной из них. Поэтому следует выяснить, каким образом обработать результаты этих измерений для определения параметров одной из этих функций с максимальной точностью. Для этого рассмотрим квадратичные формы типа

$$D^2 = \sum_i \mu_i [f(x_i) - \xi(x_i)]^2 \quad (25)$$

и определим произвольный параметр  $a$  функции  $f(x,a)$ , минимизируя выражение по этому параметру. В этом случае  $\partial D^2 / \partial a = 0$  и имеем

$$\sum_i \mu_i [f(x_i, a) - \xi(x_i)] \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} = 0. \quad (26)$$

Если  $a'$  – измеряемое значение параметра  $a$ , определяемое из (26), то для отклонения  $\Delta a$  от истинного значения параметра  $a$  имеем

$$\begin{aligned} f(x_i, a') - \xi(x_i) &= f(x_i, a + \Delta a) - \overline{\xi(x_i)} - \Delta \xi(x_i) = \\ &= f(x_i, a) - \overline{\xi(x_i)} + \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \Delta a - \Delta \xi(x_i) = \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \Delta a - \Delta \xi(x_i), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\Delta \xi(x_i)$  – разброс показаний значений функции  $f(x_i, a) = \overline{\xi(x_i)}$ . Подставляя (27) в (26), с точностью до квадратичных членов имеем

$$\Delta a = \frac{\sum_i \mu_i \Delta \xi(x_i) \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a}}{\sum_i \mu_i \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2}. \quad (28)$$

Считая, что измерения разнесены на такие расстояния, что корреляции между разными  $\Delta \xi(x_i)$  отсутствуют и

$$\overline{\Delta \xi(x_i) \cdot \Delta \xi(x_k)} = \begin{cases} \sigma^2(x_i), & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (29)$$

из (28) и (29) получаем

$$\overline{\Delta a^2} = \sum_i \mu_i^2 \sigma^2(x_i) \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 / \left[ \sum_i \mu_i \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 \right]^2. \quad (30)$$

Теперь потребуем, чтобы  $\mu_k$  выбирались такими, чтобы  $\Delta a^2$  был минимальным

$$\frac{\partial \overline{\Delta a^2}}{\partial \mu_k} = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \left\{ \sum_i \mu_i^2 \sigma^2(x_i) \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 / \left[ \sum_i \mu_i \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 \right]^2 \right\} = 0. \quad (31)$$

Имеем для каждого  $\mu_k$

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma^2(x_k)} \frac{\sum_i \mu_i^2 \sigma^2(x_i) \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2}{\sum_i \mu_i \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2}, \Rightarrow \mu_k = \frac{n_0}{\sigma^2(x_i)}. \quad (32)$$

Таким образом, для оптимальной обработки измерений выражением (25) с целью определения произвольного параметра  $a$  с наименьшей  $\Delta a^2$ , получаем выражения

$$D^2 = \frac{1}{n_0} \sum_i \frac{[f(x_i) - \xi(x_i)]^2}{\sigma^2(x_i)} = \min, \quad (33)$$

$$\overline{\Delta a^2}_{\min} = 1 / \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2.$$

Т.е. наилучшей из квадратичных форм (25) для определения произвольного параметра функции является опять же выражение  $\square^2$  для данной функции. Теперь очевидно, что решение (9) обеспечивает наилучший способ распределения измерений и определения произвольных параметров функции  $f(x)$ .

Мы могли бы сформулировать задачу оптимальных измерений и с помощью выражения (30), требуя, чтобы оптимальное распределение измерений  $n(x)$  минимизировало это выражение. Это привело бы к представлению выражения (33) как (16), которое возможно только в случае оптимального распределения измерений  $n(x)$  – решения (9).

Воспользовавшись соотношениями (9) и (11), для оптимальных измерений можно получить формулу и для непрерывных измерений

$$\begin{aligned} \overline{\Delta a^2}_{\min} &= 1 / \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 = 1 / \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 n(x_i) Q_i = \\ &= 1 / N \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 \frac{\sigma(x_i)}{\int_Q \sigma(x) dx} Q_i \end{aligned} \quad (34)$$

Переходя к интегрированию, в окончательном виде получим

$$\overline{\Delta a^2}_{\min} = \frac{1}{N} \frac{\int_Q \sigma(x) dx}{\int_Q \frac{1}{\sigma^2(x)} \left( \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \right)^2 \sigma(x) dx}. \quad (35)$$

В случае равномерного распределения измерений также можно получить формулу для

непрерывных измерений

$$\begin{aligned}\overline{\Delta a^2} &= 1/\frac{N}{Q} \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 \frac{Q}{N} = 1/\frac{N}{Q} \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 Q_i = \\ &= 1/\frac{N}{Q} \sum_i \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2 Q_i.\end{aligned}\quad (36)$$

Переходя к интегрированию, получим

$$\overline{\Delta a^2} = 1/\frac{N}{Q} \int_Q \frac{1}{\sigma^2(x)} \left( \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \right)^2 dx. \quad (37)$$

Например, при пуассоновском распределении измерений имеем  $\sigma^2(x) = f(x)$  и

$$\overline{\Delta a^2}_{\min} = \frac{\int_Q \sqrt{f(x, a)} dx}{N \int_Q \frac{1}{f(x, a)} \left( \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \right)^2 \sqrt{f(x, a)} dx}, \quad \overline{\Delta a^2} = \frac{Q}{N \int_Q \frac{1}{f(x, a)} \left( \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \right)^2 dx}. \quad (38)$$

В частности, при представлении измеряемой функции в виде  $f(x) = Ag(x)$ , где  $g(x)$  – нормированная на единицу функция, а  $A$  – амплитуда (площадь) измеряемой функции, имеем

$$\overline{\Delta a^2}_{\min} = \frac{A}{N\bar{g}}, \quad \overline{\Delta a^2} = \frac{A}{N/Q}, \quad \bar{g} = \frac{\int_Q g(x, a) \sqrt{g(x, a)} dx}{\int_Q \sqrt{g(x, a)} dx}. \quad (39)$$

Для других параметров

$$\overline{\Delta a^2}_{\min} = \frac{\int_Q \sqrt{g(x, a)} dx}{NA \int_Q \frac{1}{g(x, a)} \left( \frac{\partial g(x, a)}{\partial a} \right)^2 \sqrt{g(x, a)} dx}, \quad \overline{\Delta a^2} = \frac{Q}{NA \int_Q \frac{1}{g(x, a)} \left( \frac{\partial g(x, a)}{\partial a} \right)^2 dx}. \quad (40)$$

Как видим, при равномерном распределении измерений точности определяются плотностью измерений и уменьшаются с увеличением области (площади) измерений. А оптимальные измерения, которые при пуассоновском распределении флуктуаций в основном сконцентрированы в области максимальных значений измеряемой функции, почти не зависят от области (площади) измерений и определяются шириной (площадью) измеряемой кривой. В сущности, в данном случае эффективность оптимизации определяется отношением области (площади) измерений и области распределения (площади) значений измеряемой функции.

## 8. Решение примера задачи планирования эксперимента

**Планирование измерений параметров лазерного пучка.** Так как статистическое распределение флуктуаций плотности фотонов подчиняется закону распределения Пуассона с дисперсией  $\sigma^2(r) = f(r) = (P/\pi a^2) \exp(-r^2/a^2)$ , то плотность распределения фотодетекторов для измерения параметров этой функции с наименьшей среднеквадратичной ошибкой есть  $n(r) = (n_0/2\pi a^2) \exp(-r^2/2a^2)$ , где  $n_0 = 512, 1024, 2048$ , а  $r_0 = 3a$ . С такой площадью регистрации обеспечивается прием ~ 99% мощности излучения пучка.

Измеренное значение количества фотонов фотодетектором обусловлено площадью фоточувствительной поверхности  $S$ , что соответствует измерению точек функции с амплитудой  $A = SP$ .

Для оценок относительных ошибок измерений параметров пучка воспользуемся формулой



(40). В данном случае

$$A = SP, \quad g(x) = \frac{1}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad \sqrt{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} a} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \quad (41)$$

и для ширины  $a$  и величины смещения центра пучка  $\Delta r$ , соответственно, имеем

$$\frac{\partial g(r)}{\partial a} = \frac{2}{\pi a^3} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad \frac{\partial g(r)}{\partial r} = \frac{2}{\pi a^3} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right). \quad (42)$$

Подставляя эти выражения в формулу (40), для относительных ошибок измерений амплитуды, ширины и смещения центра пучка, соответственно, получим

$$\overline{\Delta A^2}_{\min} = \pi a^2 \frac{A}{N} \frac{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) r dr}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) r dr} = 3\pi a^2 \frac{A}{N}, \quad \frac{\sqrt{\Delta A^2_{\min}}}{A} \approx \frac{1.73}{\sqrt{PNS_d/\pi a^2}}, \quad (43)$$

$$\overline{\Delta a^2}_{\min} = \frac{\pi a^4}{AN} \frac{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) r dr}{4 \int_0^\infty \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^2 \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2}\right) r dr} = \frac{27}{20} \frac{\pi a^4}{AN}, \quad \frac{\sqrt{\Delta a^2_{\min}}}{a} \approx \frac{1.16}{\sqrt{PNS_d/\pi a^2}}, \quad (44)$$

$$\overline{\Delta r^2}_{\min} = \frac{\pi a^4}{AN} \frac{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) r dr}{4 \int_0^\infty \frac{r^2}{a^2} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2}\right) r dr} = \frac{9}{8} \frac{\pi a^4}{AN}, \quad \frac{\sqrt{\Delta r^2_{\min}}}{a} \approx \frac{1.02}{\sqrt{PNS_d/\pi a^2}}. \quad (45)$$

Количество фотодетекторов в круге с радиусом  $r$  определяется формулой

$$N(r) = n_0 \int_0^r 2\pi z \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right) dz \Big/ \int_0^{r_0} 2\pi z \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right) dz = n_0 \frac{1 - \exp(-r^2/2a^2)}{1 - \exp(-r_0^2/2a^2)}. \quad (46)$$

Дискретный эквивалент строим, например, следующим образом. В начале координат располагаем один фотодетектор, которому соответствует круг с радиусом

$$r_1 = \sqrt{-2 \ln \left( 1 - \frac{1 - \exp(-r_0^2/2)}{n_0} \right)}. \quad (47)$$

Остальные области последовательно находим с помощью формулы

$$r_{i+1} = \sqrt{-2 \ln \left( \exp(-r_i^2/2) - \frac{N_{i+1}}{n_0} (1 - \exp(-r_0^2/2)) \right)}. \quad (48)$$

Здесь для области  $[r_i, r_{i+1}]$  подбираем такое количество фотодетекторов  $N_{i+1}$ , чтобы оно сравнялось с количеством квадратов, которое получается при разбиении области  $[r_i, r_{i+1}]$  на примерно квадратные области размером  $r_{i+1} - r_i$  в количестве целых от  $[\pi(r_{i+1} + r_i)/(r_{i+1} - r_i)]$  штук

$$\left[ \frac{\pi(r_{i+1} + r_i)}{r_{i+1} - r_i} \right] = N_{i+1}. \quad (49)$$

Уравнение (49) с аргументом  $r_{i+1}$  в виде (48) всегда имеет решение, так как при увеличении  $N_{i+1}$  от нуля до бесконечности  $r_{i+1} - r_i$  также увеличивается от нуля до бесконечности, а выражение (49) наоборот – уменьшается от бесконечности до нуля. Найденные таким образом  $N_{i+1}$  фотодетекторы располагаются на окружностях с радиусом  $R_{i+1} = (r_{i+1} + r_i)/2$  и в итоге

получается примерно однородное (по радиусу и по углам) распределение с круговой симметрией.

В частности, при равномерном распределении измерений наиболее подходящим является распределение детекторов на равностоящих окружностях с радиусами  $R_i = i r_1$  и последовательностью  $N_i = 6i = [2\pi i]$ ; (6, 12, 18, 24, ...). При таком разбиении количество детекторов  $N_i$  на окружности с радиусом  $R_i$  линейно возрастает, а соотношение сторон квадратов остается постоянным и максимально близким к единице –  $\pi/3 \approx 1.047$ .

В данном случае, для достижения максимальной однородности распределения детекторов, второй ряд фотодетекторов следует поставить на расстоянии  $R_2 \approx 1.7-1.8 \cdot r_1$  и произвести некоторое перераспределение количества фотодетекторов на окружностях. Критерием удачного распределения может служить гладкость кривой зависимости количества фотодетекторов от радиуса.

Результаты вычислений для фотодетекторов в количестве 512, 1024 и 2048 штук приведены, соответственно, в виде таблиц, графиков и рисунков на рис.3–6.

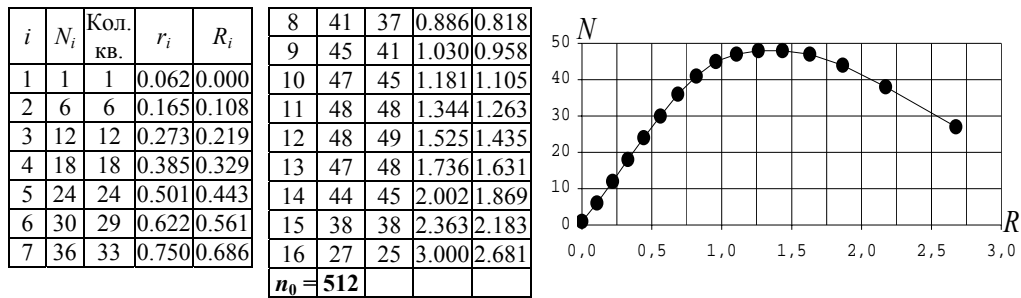


Рис.3. Табличное и графическое представление оптимального распределения фотодетекторов в количестве 512 штук.

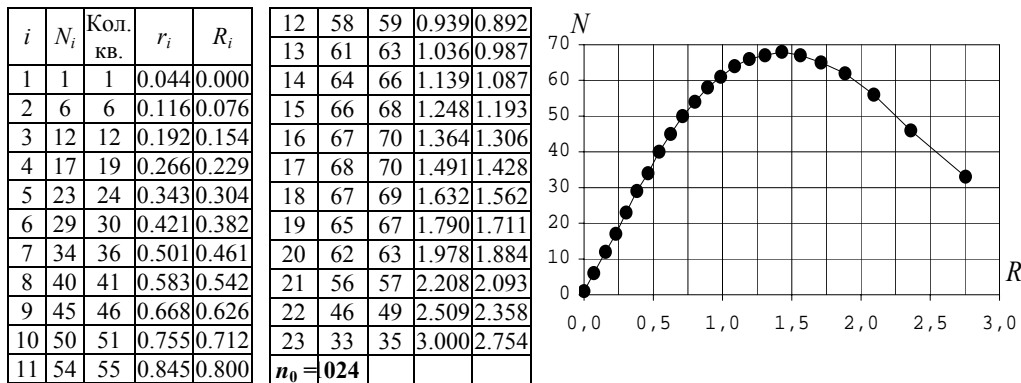


Рис.4. Табличное и графическое представление оптимального распределения фотодетекторов в количестве 1024 штук.

$i$	$N_i$	Кол. кв.	$r_i$	$R_i$
1	1	1	0.031	<b>0.000</b>
2	6	6	0.082	<b>0.054</b>
3	12	12	0.136	0.109
4	18	18	0.190	0.163
5	24	24	0.245	0.217
6	30	30	0.300	0.272
7	36	36	0.356	0.328
8	42	42	0.413	0.384
9	47	48	0.469	0.441
10	53	53	0.528	0.498
11	58	59	0.586	0.557
12	63	64	0.646	0.616
13	68	69	0.707	0.676
14	73	73	0.770	0.738
15	77	78	0.834	0.802
16	81	82	0.899	0.867
17	85	86	0.967	0.933
18	88	89	1.038	1.002
19	91	92	1.110	1.074
20	93	95	1.186	1.148
21	95	97	1.265	1.226
22	96	98	1.349	1.307
23	97	98	1.437	1.393
24	97	98	1.533	1.485
25	96	96	1.635	1.584
26	94	94	1.747	1.691
27	90	92	1.871	1.809
28	85	87	2.009	1.940
29	79	81	2.171	2.090
30	70	73	2.366	2.269
31	59	61	2.620	2.493
32	44	46	3.000	2.810
<b><math>n_0 = 2048</math></b>				

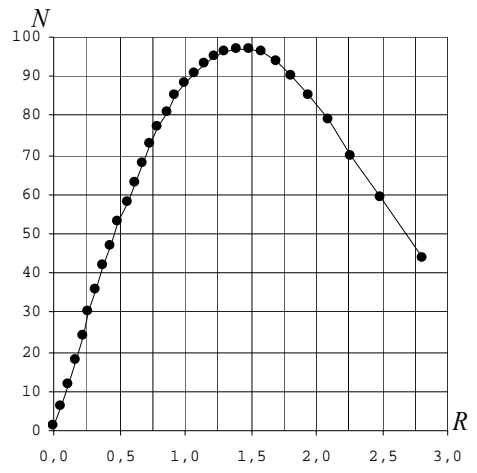


Рис. 5. Табличное и графическое представление оптимального распределения фотодетекторов в количестве 2048 штук.

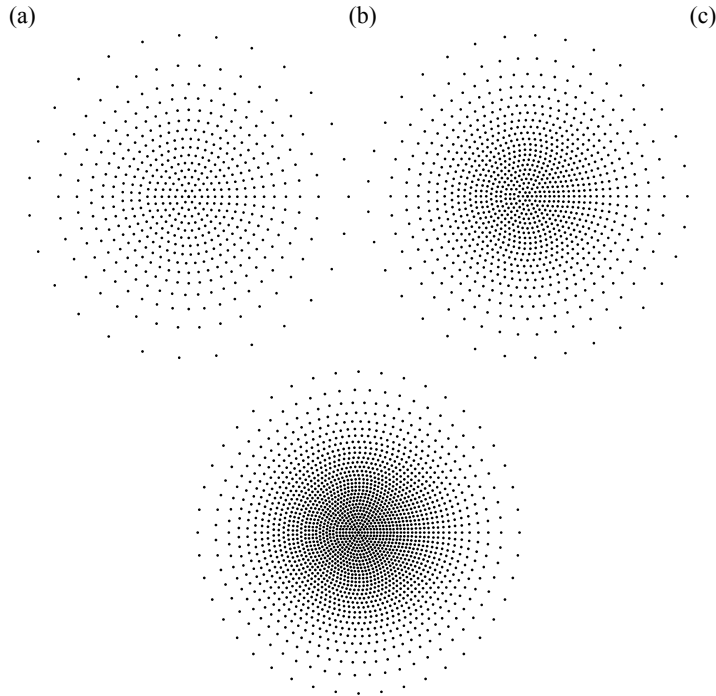


Рис.6. Оптимальное распределение фотодетекторов на принимаемой поверхности в количестве 512 (a), 1024 (b) и 2048 (c) штук.

### 8. Заключение и выводы

1. Сформулирован критерий оптимальности измерений на основе выражения  $\overline{D^2} = \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx$ , по которому оптимальные измерения обеспечивают наименьшую величину

$$\overline{D^2} = \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx \rightarrow \min.$$

2. Сформулирована вариационная задача для оптимального распределения измерений  $n(x)$ , обеспечивающего минимум функционала  $\overline{D^2} = \int_Q \frac{\sigma^2(x)}{n(x)} dx \rightarrow \min$ , при условии ограничения

$$\text{количества измерений } n_0 = \int_Q n(x) dx.$$

3. Оптимальное распределение  $n(x) = n_0 \sigma(x) / \int_Q \sigma(x) dx$  является решением вариационной задачи и позволяет построить дискретный эквивалент оптимальных измерений, т.е. определяет координаты оптимального расположения детекторов при выбранных условиях дискретизации  $\int_{Q_i} n(x) dx = Q_i n(x_i) = 1$ , где  $Q_i$  – область замещения непрерывного распределения  $n(x)$ , а оптимальное расположение детекторов в точках  $x_i$  соответствует точке среднего значения  $n(x)$  в области  $Q_i$ .

4. Наиболее устойчивыми характеристиками обладают измерения с оптимальным распределением. Они обеспечивают минимальные потери точности измерений, как при изменении числа измерений, так и при их перераспределении.

5. При оптимальных измерениях любой участок измерений (показания любого детектора)

имеет одинаковый вклад в определении точности измерений, т.е. оптимальные измерения обеспечивают равноценность (однородность) измерений в разных точках.

6. Оптимальные измерения обеспечивают оптимальные измерения не только значений самой функции, но и значений произвольных параметров этой функции. При этом наилучшей из квадратичных форм  $\sum_i \mu_i [f(x_i, a) - \xi(x_i)]^2$  для определения произвольного параметра  $a$

измеряемой функции  $f(x, a)$  есть  $\chi^2 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} [f(x_i, a) - \xi(x_i)]^2 / \sigma^2(x_i)$ , при котором для произвольного параметра  $a$  измеряемой функции обеспечивается максимальная точность

измерений  $\overline{\Delta a^2}_{\min} = 1 / \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \left( \frac{\partial f(x_i, a)}{\partial a} \right)^2$  – как для оптимальных, так и для неоптимальных измерений.

7. Получено непрерывное представление дискретно определенной функции  $\chi^2$  в виде

$$\chi^2 = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{[f(x_i) - \xi(x_i)]^2}{\sigma^2(x_i)} = \frac{1}{\int_{\Omega} \sigma(x) dx} \int_{\Omega} \frac{[f(x) - \xi(x)]^2}{\sigma(x)} dx,$$

соответствующее именно оптимальному распределению измерений.

8. Результаты теоретических исследований продемонстрированы на примере решения задачи планирования эксперимента по измерению пространственных параметров лазерного пучка с наименьшим среднеквадратичным отклонением при ограниченном количестве фотодетекторов.

Автор благодарит Г.Б. Христиансена, Г.Л. Башинджагяна и других сотрудников НИИЯФ МГУ за интерес к работе и полезные обсуждения. Е.И. Тукиша, В.П. Павлюченко и Е.Г. Базарова за оказанную помощь и плодотворные обсуждения в ходе выполнения работы, а также сотрудников лабораторий космических лучей ФИАН СССР и высокогорной станции Тянь-Шань за проявленный интерес и обсуждение работы. Автор благодарит Э.Ф. Мамиджаняна и В.В. Авакяна за большую поддержку в исследованиях и в инициировании работы, а также А.А. Чилингирияна, С.В. Тер-Антоняна и других сотрудников лаборатории космических лучей ЕрФИ за многостороннее обсуждение работы и всех участников совместной работы в период 1984-86 г.г. на высокогорной станции космических лучей на горе Арагац в Армении, где и были получены предварительные результаты данной работы [3,4].

Автор благодарит сотрудников кафедры Радиопизики сверхвысоких частот и телекоммуникации Радиофизического факультета ЕГУ, в частности А.О. Макаряна за полезные обсуждения и помощь в ходе подготовки рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Granino A. Korn, Theresa M. Korn.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. New York, Dover Publications, 2000.
2. **В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., Наука, 1985.
3. **В.М. Мхитарян.** Оптимизация измерений по критерию минимума среднеквадратичных отклонений. Вопросы атомной науки и техники, серия Техника физического эксперимента, **2(33)**, 1987, с. 57-63.
4. **В.М. Мхитарян, О.Б. Бабаджанян.** Оптимальное распределение сцинтилляционных детекторов для регистрации широких атмосферных ливней. Вопросы атомной науки и техники, серия Техника физического эксперимента, **2(33)**, 1987, с. 64-70.

#### EXPERIMENT PLANNING: OPTIMAL MEASUREMENT BY THE MINIMAL SAMPLE DISPERSION CRITERION

V.M. MEKHITARIAN

The criterion of optimal measurements based on a minimum dispersion and variational problem

of optimal allocation of measurements are formulated. An analytical solution for the measurement density in the case of the optimal measurement is proposed, discrete equivalent of the optimal measurement is constructed. The most stable characteristics are measurements with optimal distribution. They provide the minimum loss of accuracy both when the number of measurements is changed, and in their redistribution. When an optimal measurement of any portion of measurement (reading of any detector) has the same contribution to the determination of the accuracy of measurements, i.e., optimal measurements provide equivalence (homogeneity) of the measurements at different points. Optimal measurements provide the best measure of not only the values of the function, but also of the values of arbitrary parameters of this function. In this case, the best of the quadratic forms to determine the arbitrary parameter measurement function is the expression of the distribution function  $\chi^2$ . Continuous representation of discretely defined distribution function  $\chi^2$ , corresponding exactly optimal distribution of the measurements is proposed. An example of solving the problem of planning the experiment is given to measure the spatial parameters of the laser beam with the lowest standard deviation of a limited number of photodetectors.

**ՓՈՐՁԻ ՊԼԱՆԱՎՈՐՈՒՄ՝ ՕՊՏԻՄԱԼ ՉԱՓՈՒՄ ԸՍՏ  
ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԴԻՍՊԵՐՄԵՆՏԻ ՉԱՓԱՆԻՇԻ**

Վ.Ս. ՄԻՆԻՐԱՐՅԱՆ

Փոքրագույն դիսպերսիայի հիման վրա ձևակերպված է չափումների օպտիմալության չափանիշ և չափումների օպտիմալ բաշխման վարիացիոն խնդիր: Ստացված է անընդհատ չափումների օպտիմալ բաշխման խտության անալիտիկ լուծումը և կառուցված է օպտիմալ չափումների ընդհատ (դիսկրետ) համարժեքը: Ամենամեծ կայունությամբ օժտված են օպտիմալ չափումները: Նրանք ապահովում են չափումների ճշտության ամենափոքր կորուստ ինչպես չափումների թվի կրճատման, այնպես էլ նրանց վերադասավորման դեպքում: Օպտիմալ չափումների դեպքում չափման ցանկացած հատված (կամայական ընդունիչի գրանցում) նույն ներդրումն ունի փորձի ճշտության որոշման համար, այսինքն, օպտիմալ չափումներն ապահովում են տարբեր կետերում չափումների համարժեքությունը (համասեռությունը): Օպտիմալ չափումներն ապահովում են ոչ միայն ֆունկցիայի արժեքների օպտիմալ չափում, այլ նաև ֆունկցիայի ցանկացած բնութագրիչի արժեքների համար: Ընդ որում, չափվող ֆունկցիայի կամայական բնութագրիչի որոշման համար լավագույն քառակուսային ձևը դա  $\chi^2$  բաշխման ֆունկցիայի արտահայտությունն է: Ստացված է ընդհատ սահմանված  $\chi^2$  բաշխման ֆունկցիայի անընդհատ ներկայացումը, որը համապատասխանում է հենց օպտիմալ չափումների դեպքին: Որպես օրինակ բերված է սահմանափակ քանակի լուսաընդունիչների դեպքում լազերային փնջի տարածական բնութագրերի փոքրագույն քառակուսային շեղումով չափումների փորձի պլանավորման խնդրի լուծումը: