Известия НАН Армении, Физика, т.48, №2, с.105-110 (2013)

УДК 530.145

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Л.Г. МАРДОЯН[1†], М.Г. ПЕТРОСЯН[2]

[1]Ереванский государственный университет, Армения

[2]Степанакертский филиал Армянского государственного аграрного университета,
Степанакерт, Нагорно-Карабахская Республика
[†]e-mail: mardoyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 3 сентября 2012 г.)

Рассмотрена альтернативная модель сферического осциллятора Хиггса. Найдены квазирадиальные волновые функции и энергетические спектры альтернативной модели сферического осциллятора на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде. Показано, что энергетический спектр альтернативной модели сферического осциллятора на двухполостном гиперболоиде принимает как дискретные, так и непрерывние значения. Полученные нами результаты могут быть применены для построения теории квантового эффекта Холла в высших размерностях.

1. Введение

Впервые модель сферического осциллятора была предложена Хиггсом [1,2]. D-мерный сферический осциллятор определяется потенциалом

$$V^D = \left(\omega^2/2\right)\left(x_\mu\, x_\mu / x_0^2\right), \quad \mu = 1, 2, \ldots, D, \tag{1}$$

где x_0 и x_μ – эвклидовые координаты объемлющего пространства IR^{D+1}, причем $x_0^2 + x_\mu^2 = r_0^2$ для D-мерной сферы и $x_0^2 - x_\mu^2 = r_0^2$ для D-мерного двухполостного гиперболоида. (Здесь мы пользуемся системой единиц, в которой приведенная масса m и постоянная Планка $\hbar$ определены следующим образом: $m = \hbar = 1$.) Сферический осциллятор (1) на D-мерной сфере и на D-мерном двухполостном гиперболоиде детально рассмотрен в работе [3]. Задача осциллятора на сферах и псевдосферах с разных точек зрения рассмотрена в работах [4-10].

Альтернативная модель сферического осциллятора впервые была рассмотрена в работах [11,12], где он определяется потенциалом

$$V_S^D = 2\omega^2 r_0^2 \left(r_0 - x_0\right)/\left(r_0 + x_0\right) \tag{2}$$

на D-мерной сфере и

$$V_H^D = 2\omega^2 r_0^2 \left(x_0 - r_0\right)/\left(x_0 + r_0\right) \tag{3}$$

на D-мерном двухполостном гиперболоиде. Предложенная нами модель сферического осциллятора, в отличие от осциллятора Хиггса, не имеет особенности на экваторе сферы, т.е. при $\chi = \pi/2$.

Двумерные случаи осцилляторных потенциалов (2) и (3) были рассмотрены в работах [13,14].

2. Квазирадиальная функция на *D*-мерной сфере

Уравнение Шредингера, описывающее квантовое движение нерелятивистской частицы в D-мерном искривленном пространстве, имеет следующий вид:

$$\hat{H}\,\psi = \left[-(1/2)\Delta_{LB} + V(\mathbf{x})\right]\psi = E\,\psi, \tag{4}$$

где оператор Лапласа–Белтрами в произвольных криволинейных координатах ξ_μ имеет вид

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\right),$$

причем $g = \det g_{\mu\nu}$ и $g_{\alpha\mu}\, g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta$.

В гиперсферических координатах

$$\begin{aligned}
x_0 &= r_0\cos\chi,\\
x_1 &= r_0\sin\chi\cos\theta_1,\\
x_2 &= r_0\sin\chi\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&\vdots\\
x_{D-1} &= r_0\sin\chi\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{D-2}\cos\phi,\\
x_D &= r_0\sin\chi\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{D-2}\sin\phi,
\end{aligned}$$

где $r_0 \in [0,\infty)$, $\chi, \theta_1, \ldots, \theta_{D-2} \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$, а осцилляторный потенциал (2) имеет вид

$$V_S^D = 2\omega^2 r_0^2 t\,\mathrm{an}^2(\chi/2). \tag{5}$$

Уравнение Шредингера (4) для потенциала (5) может быть решено путем поиска волновой функции в виде

$$\psi(\chi, \theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \phi) = R(\chi)\, Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}(\theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \phi),$$

где L – глобальный угловой момент, l_i – угловые гипермоменты, а гиперсферическая функция $Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}(\theta_1, \ldots, \theta_{D-2}, \phi)$ является собственной функцией Лапласа–Белтрами на $(D-1)$-мерной сфере с собственными значениями $L(L+D-2)$. После разделения переменных в (4) получим следующее квазирадиальное уравнение:

$$\frac{1}{(\sin\chi)^{D-1}}\frac{d}{d\chi}\left[(\sin\chi)^{D-1}\frac{dR}{d\chi}\right] + \left[2r_0^2E - \frac{L(L+D-2)}{\sin^2\chi} - 4\omega^2 r_0^2\tan^2\frac{\chi}{2}\right]R = 0.$$

С помощью подстановки

$$R(\chi)=(\sin\chi)^{-(D-1)/2}\,Z(\chi)$$

мы приходим к уравнению типа Пешля–Теллера

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2}+\left[\varepsilon_S-\frac{\nu^2-1/4}{\cos^2\zeta}-\frac{\left(L+(D-2)/2\right)^2-1/4}{\sin^2\zeta}\right]Z=0, \qquad (6)$$

где $\zeta=\chi/2\in[0,\pi/2]$, а

$$\varepsilon_S=8r_0^2E+(D-1)^2+16\omega^2r_0^4\,,\quad \nu=\sqrt{\left(L+(D-2)/2\right)^2+16\omega^2r_0^4}\,.$$

Решение уравнения (6), регулярное на отрезке $\zeta\in[0,\pi/2]$ и выраженное через гипергеометрическую функцию, согласно [15], имеет вид

$$R^D_{n_r L\nu}(\chi)=C^D_{n_r L\nu}\left(\sin\frac{\chi}{2}\right)^L\left(\cos\frac{\chi}{2}\right)^{\nu-D/2+1}{}_2F_1\left(-n_r,n_r+L+\nu+\frac{D}{2};L+\frac{D}{2};\sin^2\frac{\chi}{2}\right). \quad (7)$$

При этом парарметр ε_S квантуется и принимает следующий вид:

$$\varepsilon_S=\left(2n_r+L+\nu+D/2\right)^2,$$

где $n_r=0,1,2,\ldots$ – “квазирадиальное” квантовое число. Тогда собственные значения энергии даются формулой

$$E^S_{ND}=\frac{1}{8r_0^2}\left[(N+1)(N+D)+(2\nu-1)\left(N+\frac{D}{2}\right)+L(L+D-2)-\frac{D}{2}(D-1)\right], \quad (8)$$

где $N=2n_r+L=0,1,2,\ldots$ является главным квантовым числом альтернативной модели сферического осциллятора.

Далее, выбирая для квазирадиальной волновой функции (7) условие нормировки

$$r_0^D\int\limits_0^\pi\left|R^D_{NL\nu}(\chi)\right|^2(\sin\chi)^{D-1}\,d\chi=1\,,$$

находим, что постоянная нормировки $C^D_{NL\nu}$ имеет вид

$$C^D_{NL\nu}=\frac{1}{\Gamma\left(L+\frac{D}{2}\right)}\sqrt{\frac{\left(N+L+\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+L+D}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{N+L+D}{2}\right)}{2^{D-1}r_0^D\left(\frac{N-L}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{N-L}{2}+\nu+1\right)}}. \qquad (9)$$

В пределах $r_0\to\infty$ и $\chi\to 0$, но при фиксированном $\chi r_0\sim r$ мы видим, что

$$\lim_{r_0\to\infty}E^S_{ND}=\omega(N+D/2)\,, \qquad (10)$$

а

$$\lim_{r_0\to\infty} R^D_{NL\nu}(\chi) = \frac{\omega^{\frac{L+D}{2}}}{\Gamma\left(L+\frac{D}{2}\right)}\sqrt{\frac{2\Gamma\left(\frac{N+L+D}{2}\right)}{\left(\frac{N-L}{2}\right)!}}\, r^L e^{-\frac{\omega r^2}{2}} F\left(-\frac{N-L}{2}; L+\frac{D}{2}; \omega r^2\right), \quad (11)$$

где $F(a;c;x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Формула (11) совпадает с известной формулой для радиальной волновой функции *D*-мерного изотропного осциллятора в плоском пространстве [16].

3. Квазирадиальная функция на *D*-мерном гиперболоиде

Псевдосферические координаты на *D*-мерном двухполостном гиперболоиде $\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_D^2 = r_0^2,\ x_0 \ge r_0\right)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_0 = r_0 \cosh\tau,\\
&x_1 = r_0 \sinh\tau\cos\theta_1,\\
&x_2 = r_0 \sinh\tau\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&\vdots\\
&x_{D-1} = r_0 \sinh\tau\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{D-2}\cos\phi,\\
&x_D = r_0 \sinh\tau\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{D-2}\sin\phi,
\end{aligned}$$

где $\tau \in [0, \infty)$. Переменные в уравнении Шредингера (4) для осцилляторного потенциала (3), который в псевдосферических координатах имеет вид

$$V_H^D = 2\omega^2 r_0^2 \tanh^2(\tau/2),$$

разделяются, если волновую функцию представить в виде

$$\psi(\tau,\theta_1,\ldots,\theta_{D-2},\phi) = R(\tau) Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}(\theta_1,\ldots,\theta_{D-2},\phi).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, l_i являются угловыми гипермоментами, L – глобальный угловой момент, а $Y_{L l_1 l_2 \ldots l_{D-2}}(\theta_1,\ldots,\theta_{D-2},\phi)$ – гиперсферическая функция, которая является решением уравнения Лапласа–Белтрами на $(D-1)$-мерной сфере. После разделения переменных в уравнении (4) мы приходим к следующему квазирадиальному уравнению:

$$\frac{1}{(\sinh\tau)^{D-1}}\frac{d}{d\tau}\left[(\sinh\tau)^{D-1}\frac{dR}{d\tau}\right] + \left[2r_0^2 E - \frac{L(L+D-2)}{\sinh^2\tau} - 4\omega^2 r_0^2 \tanh^2\frac{\tau}{2}\right]R = 0.$$

Теперь, пользуясь подстановкой

$$R(\tau) = (\sinh\tau)^{-\frac{D-1}{2}} Z(\tau),$$

приходим к уравнению, имеющему вид одномерного уравнения Шредингера, т.е. к уравнению

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2}+\left[\varepsilon_H-\frac{\nu^2-1/4}{\cosh^2\rho}-\frac{\left(L+\left(D-2\right)/2\right)^2-1/4}{\sinh^2\rho}\right]Z=0, \qquad (12)$$

где $\rho=\tau/2\in\left[0,\infty\right)$, а $\varepsilon_H=8r_0^2E-\left(D-1\right)^2-16\omega^2r_0^4$.

Таким образом, задача осциллятора на двухполостном гиперболоиде описывается модифицированным уравнением Пешля–Теллера, и в отличие от задачи осциллятора на сфере, которая имеет только дискретный спектр, уравнение (12) обладает как дискретными, так и непрерывными значениями энергетического спектра.

Нормированная условием

$$r_0^D\int_0^\infty\left|R_{n_rL\nu}\left(\tau\right)\right|^2\left(\sinh\tau\right)^{D-1}d\tau=1,$$

регулярная на отрезке $\tau\in\left[0,\infty\right)$, квазирадиальная волновая функция дискретного спектра имеет вид

$$R^D_{n_rL\nu}\left(\tau\right)=\frac{1}{\Gamma\left(L+D/2\right)}\sqrt{\frac{\left(2\nu-4n_r-2L-D\right)\Gamma\left(\nu-n_r\right)\Gamma\left(n_r+L+D/2\right)}{2^Dr_0^D\left(n_r\right)!\Gamma\left(\nu-n_r-L-D/2+1\right)}}\times$$
$$\times\left(\sin\chi/2\right)^L\left(\cos\chi/2\right)^{\nu-D/2+1}{}_2F_1\left(-n_r,n_r+L+\nu+D/2;L+D/2;\sin^2\chi/2\right), \qquad (13)$$

где n_r – квазирадиальное квантовое число и принимает следующие значения:

$$n_r=0,1,2,\ldots,\left[\left(1/2\right)\left(\nu-L-D/2\right)\right].$$

Здесь $\left[\left(1/2\right)\left(\nu-L-D/2\right)\right]$ означает целое значение числа $1/2\left(\nu-L-D/2\right)$. Тогда квантованное выражение параметра ε_H дается формулой

$$\varepsilon_H=-\left(2n_r+L-\nu+D/2\right)^2.$$

Теперь, пользуясь определением параметра ε_H для энергетического спектра альтернативной модели осциллятора на D-мерном двухполостном гиперболоиде, получим выражение

$$E^H_{ND}=\frac{1}{8r_0^2}\left[\left(2\nu-1\right)\left(N+\frac{D}{2}\right)-N\left(N+D-1\right)-L\left(L+D-2\right)+\frac{D}{2}\left(D-1\right)\right]. \qquad (14)$$

Здесь $N=2n_r+L$ – главное квантовое число, и связанные состояния возможны лишь для следующих значений главного квантового числа N:

$$0\le N\le\left[\nu-D/2\right].$$

Таким образом, вследствие ограниченности значений главного квантового числа N, в отличие от сферического осциллятора, число связанных состояний конечное.

В пределе $r_0\to\infty$, $\tau\sim r/r_0$ и $\nu\sim4\omega r_0^2$ непрерывный спектр осциллятора на двухполостном гиперболоиде исчезает, а дискретный спектр становится бесконечным, и легко заметить, что энергетический спектр (14) переходит в формулу (10), а волновая функция (13) – в (11).

В заключение отметим, что предложенная модель осциллятора сохраняет все симметрии при включении калибровочных полей соответствующих монополей. Это дает возможность ее использования для построения теории квантового эффекта Холла в высших размерностях, наподобие четырехмерного эффекта Холла [17] и его восьмимерного аналога [18] (см. также обзор [19]).

Авторы благодарны А.П. Нерсесяну за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН РА в рамках армяно-беларусского совместного научного гранта 11РБ–010.0.

ЛИТЕРАТУРА

1. **P.W.Higgs.** J. Phys. A, **12**, 309 (1979).
2. **H.I.Leemon.** J. Phys. A, **12**, 489 (1979).
3. **E.G.Kalnins, W.J.Miller, G.S.Pogosyan.** Phys. At. Nucl., **65**, 108 (2002).
4. **D.Banatos, C.Daskaloyannis, K.Kokkotas.** Phys. Rev. A, **50**, 3700 (1994).
5. **C.Grocshe, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian.** Fortschritte der Physik, **43**, 523 (1995).
6. **C.Grocshe, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian.** Phys. Part. Nucl., **27**, 244 (1996).
7. **C.Grocshe, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian.** Phys. Part. Nucl., **28**, 486 (1997).
8. **E.G.Kalnins, W.J.Miller, G.S.Pogosyan.** J. Math. Phys., **37**, 6439 (1996).
9. **E.G.Kalnins, W.J.Miller, G.S.Pogosyan.** J. Math. Phys., **38**, 5416 (1997).
10. **L.G.Mardoyan, A.Nersessian.** Phys. Rev. B, **72**, 233303 (2005).
11. **S.Bellucci, L.G.Mardoyan, A.Nersessian.** Phys. Lett. B, **636**, 137 (2006).
12. **L.G.Mardoyan, A.Nersessian, A.Yeranyan.** Phys. Lett. A, **366**, 30 (2007).
13. **S.Bellucci, A.Nersessian.** Phys. Rev. D, **67**, 065013 (2003).
14. **S.Bellucci, A.Nersessian, A.Yeranyan.** Phys. Rev. D, **70**, 085013 (2004).
15. **З.Флюгге.** Задачи по квантовой механике. М., Мир, 1974.
16. **Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян.** Квантовые системы со скрытой симметрией. Межбазисные разложения. М., Физматлит, 2006.
17. **S.C.Zhang, J.P.Hu.** Science, **294**, 823 (2001).
18. **B.A.Bernevig, J.P.Hu, N.Toumbas, S.C.Zhang.** Phys. Rev. Lett., **91**, 236803 (2003).
19. **D.Karabali, V.P.Nair.** J. Phys. A, **39**, 12735 (2006).

AN ALTERNATIVE MODEL OF SPHERICAL OSCILLATOR

L.G. MARDOYAN, M.G. PETROSYAN

An alternative model of Higgs spherical oscillator is considered. The quasiradial wave functions and energy spectra of the alternative model of spherical oscillator on the *D*-dimensional sphere and *D*-dimensional two-sheeted hyperboloid are found. It is shown that the energy spectrum of the alternative model of spherical oscillator on a two-sheeted hyperboloid takes both discrete and continuous values. The obtained results can be applied in higher dimensions for constructing quantum Hall effect theory.